## Egzamin z Matematyki Dyskretnej

18 czerwca 2021, godz. 10:30-13:55 (w tym 25 minut na przygotowanie i wgranie plików itp.)

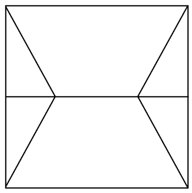
Każde rozwiązanie należy napisać na osobnej kartce (zadanie 6 może być całe na jednej, z jasnym oznaczeniem poszczególnych podpunktów). Prosimy pisać wyraźnie, dużymi literami, ciemnym długopisem.
Za każde z sześciu zadań można uzyskać od 0 do 10 punktów (a więc za cały egzamin od 0 do 60).
W zadaniach 1 i 6 (b) wyniki należy podać w postaci zwartej (bez wielokropka, znaku sumowania itp.) i zawierającej tylko liczby, zmienne, symbole podstawowych działań oraz symbol silni, np. odpowiedź $2019^{2020} + 175 \cdot n! - k^7$ jest OK, natomiast odpowiedzi $1 + 2 + \ldots + 2020$ lub $\binom{n}{7}$ nie są.

***1.*** Rzucamy 6 razy z rzędu (kolejność rzutów jest istotna) dwiema monetami jednocześnie: 1 zł i 5 zł. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz pojawi się każdy z czterech możliwych wyników (orzeł-orzeł, orzeł-reszka, reszka-orzeł, reszka-reszka).

***2.*** Rozważmy wszystkie $k$-wyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $[n]$. Dla każdego takiego ciągu wyznaczamy jego najmniejszy wyraz, a następnie sumujemy wybrane w ten sposób wyrazy. Wykaż, że uzyskana suma równa jest

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

***3.*** Z czterech przystających płytek trójkątnych oraz dwóch przystających płytek w kształcie trapezów chcemy zbudować kwadratowy witraż w następujący sposób:



Na ile geometrycznie rozróżnialnych sposobów można to zrobić, jeśli każda z płytek może być w dowolnym z czterech kolorów? Płytki są szklane i przezroczyste, więc np. witraż jednobarwny wygląda identycznie z obu stron (innymi słowy: uwzględniamy wszystkie izometrie powyższej figury). Wynik należy podać w postaci konkretnej liczby.

***4.*** Wielościan wypukły ma ściany co najwyżej pięciokątne i w każdym jego wierzchołku schodzi się dokładnie pięć ścian. Dla $i = 3, 4, 5$ niech $s_i$ oznacza liczbę ścian $i$-kątnych. Wykaż, że

$$s_3 = 2s_4 + 5s_5 + 20.$$

***5.*** W międzynarodowym przyjęciu uczestniczy 55 dyplomatów, reprezentujących 11 krajów, po pięciu dyplomatów z każdego kraju. Czy można usadzić ich wszystkich przy okrągłym stole tak, by dla każdych dwóch krajów pewni dwaj ich dyplomaci siedzieli obok siebie?

***6.*** (a) Dane są dwie proste równoległe, na każdej z nich zaznaczono 100 punktów. Ile jest trójkątów o wierzchołkach w tych 200 punktach? Wystarczy podać wynik (w postaci konkretnej liczby).

(b) Ile jest liczb $k$-cyfrowych o sumie cyfr równej 9? Wystarczy podać wynik.

(c) Wyznacz (w postaci funkcji wymiernej) funkcję tworzącą ciągu $a_n = n$.

(d) Niech $X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $Y = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right]$, $Z = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}$. Rozstrzygnij, czy dla każdego $n$ spełniającego warunki $10 < n < 1000$ zachodzi:

(1) $X < 1000$, (2) $X < \left\{{n \atop 2}\right\}$, (3) $Y < 1000!$, (4) $Y < Z$.

(e) Czy istnieje graf spójny o co najmniej 3 wierzchołkach i o liczbie chromatycznej większej niż największy stopień wierzchołka w tym grafie? Należy podać przykład z uzasadnieniem, jeśli tak lub dowód, jeśli nie.